4. Devoir maison : Irrationnalité de $\sqrt{2}$

Pythagore et les Pythagoriciens affirmaient que "*tout est nombre*", et cette croyance avait pour eux une grande importance mystique. Or ils entendaient par *nombre* les nombres entiers, voire les fractions (nombres rationnels, appelés *proportions*).
C'est ainsi que lorsque l'étude de la mesure de la diagonale d'un carré de côté 1 a abouti à un résultat irrationnel ($\sqrt{2}$), leur système de croyance a été profondément remis en cause. Selon la légende, ils ont voulu étouffer cette découverte, et auraient même noyé l'un de leurs disciples de peur qu'il la divulgue.
L'objet de cet exercice est de démontrer ***par l'absurde*** que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Nous allons donc supposer le contraire de ce que nous voulons démontrer, et essayer d'aboutir à une contradiction.
On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Ainsi, il peut s'écrire sous forme de fraction irréductible. Soit $\frac{p}{q}$ cette fraction ($p \neq 0$). Comme la fraction est irréductible, les nombres p et q n'ont aucun diviseur en commun.

1. *Question préliminaire* : démontrer que le carré d'un nombre pair est pair, et que le carré d'un nombre impair est impair. En déduire que si son carré est pair, le nombre considéré est également pair.
2. On a $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Démontrer que p^2 est pair, puis que p est pair.
3. En déduire que q^2 est pair, puis que q est pair.
4. Expliciter la contradiction trouvée, et conclure.